

Capítulo 5

P 5.2

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad I &= \int_1^2 \left(2x + \frac{1}{x} \right) dx = [x^2 + \ln|x|] \Big|_1^2 = [(2^2 + \ln 2) - (1^2 + \ln 1)] = 4 + \\ &\quad \ln 2 - 1 = 3 + \ln 2 \end{aligned}$$

Resposta: $I = 3 + \ln 2$.

b) Vamos fazer a substituição de variável:

$$\begin{aligned} u = 2x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad du = 4x dx \quad \rightarrow \quad x dx &= \frac{du}{4} \quad \rightarrow \quad 2x^2 = u - 1 \quad \rightarrow \quad x^2 \\ &= \frac{u - 1}{2} \end{aligned}$$

e mudando os limites de integração,

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad u = 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

$$x = 2 \quad \rightarrow \quad u = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx \\ &= \int_0^2 \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \int_1^9 \frac{\left(\frac{u-1}{2}\right) du}{\sqrt{u} \cdot 4} = \frac{1}{8} \int_1^9 (u-1) u^{-1/2} du \\ &= \frac{1}{8} \int_1^9 \left(u^{1/2} - u^{-1/2} \right) du = \frac{1}{8} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{1/2}}{1/2} \right] \Big|_1^9 \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{9^{3/2}}{3} - 9^{1/2} \right) - \left(\frac{1^{3/2}}{3} - 1^{1/2} \right) \right] = \frac{1}{4} \left[(9 - 3) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[7 - \frac{1}{3} \right] = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Resposta: $I = \frac{5}{3}$.

$$\text{c)} \quad I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx$$

Vamos fazer a substituição de variável:

$$r = 2x \rightarrow dr = 2dx \rightarrow dx = \frac{dr}{2} \text{ e } s = -2x \rightarrow ds = -2dx \rightarrow dx = \frac{ds}{-2}$$

e mudando os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow r = 2.0 = 0 \text{ e } s = -2.0 = 0$$

$$x = 1 \rightarrow r = 2.1 = 2 \text{ e } s = -2.1 = -2$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 e^r \frac{dr}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{-2} e^s \frac{ds}{-2} = \frac{1}{4} [e^r] \Big|_0^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} [e^s] \Big|_0^{-2} = \frac{1}{4} (e^2 - e^0) - \frac{1}{4} (e^{-2} - e^0) = \frac{1}{4} (e^2 - e^{-2}) \end{aligned}$$

Resposta: $I = \frac{1}{4} (e^2 - e^{-2})$.

d) Vamos fazer a substituição de variável:

$$u = \cos(3x) \rightarrow du = -3 \cdot \sin(3x) dx \rightarrow \sin(3x) dx = \frac{du}{-3}$$

e mudando os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow u = \cos(3.0) = 1$$

$$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow u = \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$I = \int_1^{-1} e^u \frac{du}{-3} = -\frac{1}{3} \int_1^{-1} e^u du = -\frac{1}{3} [e^u] \Big|_1^{-1} = -\frac{1}{3} (e^{-1} - e^1) = \frac{1}{3} (e - e^{-1})$$

Resposta: $I = \frac{1}{3} (e - e^{-1})$.

e) Vamos fazer a substituição de variável:

$$t = x^2 \rightarrow dt = 2x dx \rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$$

e mudando os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow t = 0^2 = 0$$

$$x = \sqrt{\pi} \rightarrow t = \sqrt{\pi}^2 = \pi$$

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi}} x^2 \cdot x \cos x^2 dx = \int_0^{\pi} t \cdot \cos t dt$$

Fazendo integração por partes,

$$u = t \rightarrow du = dt$$

$$dv = \cos t dt \rightarrow v = \sin t$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} t \cdot \cos t dt = [t \cdot \sin t] \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin t dt \\ &= [t \cdot \sin t] \Big|_0^{\pi} + [\cos t] \Big|_0^{\pi} = [\pi \cdot \sin \pi - 0 \cdot \sin 0] + [\cos \pi - \cos 0] \\ &= -1 \end{aligned}$$

Resposta: $I = -1$.

f) Vamos fazer a substituição de variável:

$$t = \operatorname{tg} x \rightarrow dt = \sec^2 x dx$$

e mudando os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow t = \operatorname{tg} 0 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1$$

$$I = \int_0^1 t \cdot dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Resposta: $I = \frac{1}{2}$.

g) Vamos fazer a substituição de variável:

$$t = x^3 + 1 \rightarrow dt = 3x^2 dx \rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{3}$$

e mudando os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow t = 0^3 + 1 = 1$$

$$x = 1 \rightarrow t = 1^3 + 1 = 2$$

$$I = \int_1^2 t^{1/2} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_1^2 = \frac{2}{9} (2^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{2}{9} (2\sqrt{2} - 1)$$

Resposta: $I = \frac{2}{9} (2\sqrt{2} - 1)$.

h) Fazendo integração por partes,

$$u = \ln x^3 \rightarrow du = \frac{3x^2}{x^3} dx = \frac{3}{x} dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

Então,

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \ln x^3 dx = [x \cdot \ln x^3] \Big|_1^3 - \int_1^3 x \cdot \frac{3}{x} dx = [x \cdot \ln x^3] \Big|_1^3 - 3 \int_1^3 dx \\ &= [x \cdot \ln x^3] \Big|_1^3 - 3[x] \Big|_1^3 = [3 \cdot \ln 3^3 - 1 \cdot \ln 1^3] - 3[3 - 1] \\ &= 9 \ln 3 - 6 \end{aligned}$$

Resposta: $I = 9 \ln 3 - 6$.

i) Vamos fazer a substituição de variável:

$$t = 2e^{2x} + 1 \rightarrow dt = 4e^{2x} dx \rightarrow e^{2x} dx = \frac{dt}{4}$$

e mudando os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow t = 2e^{2 \cdot 0} + 1 = 3$$

$$x = 1 \rightarrow t = 2e^{2 \cdot 1} + 1 = 2e^2 + 1$$

$$I = \int_3^{2e^2+1} \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} [\ln|t|]_3^{2e^2+1} = \frac{1}{4} (\ln|2e^2+1| - \ln 3) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2e^2+1}{3} \right|$$

Resposta: $I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2e^2+1}{3} \right|$.

j) Vamos fazer a substituição de variável:

$$u = x + 1 \rightarrow du = dx \rightarrow x = u - 1$$

e mudando os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow u = 0 + 1 = 1$$

$$x = 1 \rightarrow u = 1 + 1 = 2$$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 (u-1)u^{1/2} du = \int_1^2 (u^{3/2} - u^{1/2}) du = \left[\frac{u^{5/2}}{5/2} - \frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^2 \\ &= 2 \left[\left(\frac{2^{5/2}}{5} - \frac{2^{3/2}}{3} \right) - \left(\frac{1^{5/2}}{5} - \frac{1^{3/2}}{3} \right) \right] \\ &= \frac{2}{15} [(3\sqrt{2^5} - 5\sqrt{2^3}) - (3 - 5)] = \frac{2}{15} (3\sqrt{2^4 \cdot 2} - 5\sqrt{2^2 \cdot 2} + 2) \\ &= \frac{2}{15} (12\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 2) = \frac{2}{15} (2\sqrt{2} + 2) \end{aligned}$$

Resposta: $I = \frac{2}{15} (2\sqrt{2} + 2)$.

P 5.5

a)

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 e^x dx + \int_0^1 (1-x) dx = [e^x]_{-1}^0 + \left(x - \frac{x^2}{2} \right)_0^1 \\ &= e^0 - e^{-1} + \left(1 - \frac{1^2}{2} \right) - \left((0) - \frac{(0)^2}{2} \right) = 1 - e^{-1} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Resposta: $A = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{e} \right) u.a.$

b)

$$\begin{aligned}
A &= \left| \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx \right| + \int_2^3 (x^2 - x - 2) dx \\
&= \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right] \right|_{-1}^2 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^3 \\
&= \left| \left[\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2 \cdot (-1) \right] \right| \\
&\quad + \left(\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} - 2 \cdot 3 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 \right) \\
&= \left| \frac{8}{3} - 2 - 4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right| + \left(9 - \frac{9}{2} - 6 - \frac{8}{3} + 2 + 4 \right) \\
&= \left| -5 + \frac{1}{2} \right| + \left(9 - \frac{9}{2} - \frac{8}{3} \right) = \left| -\frac{9}{2} \right| + \left(\frac{54 - 27 - 16}{6} \right) = \frac{9}{2} + \frac{11}{6} \\
&= \frac{27 + 11}{6} = \frac{38}{6} = \frac{19}{3}
\end{aligned}$$

Resposta: $A = \frac{19}{3} \text{ u. a.}$

c)

$$A = \int_0^1 (3x - x) dx = \int_0^1 2x dx = [x^2] \Big|_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$$

Resposta: $A = 1 \text{ u. a.}$

d)

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 ((2 - x) - x) dx = \int_0^1 (2 - 2x) dx = [2x - x^2] \Big|_0^1 \\
&= (2 \cdot 1 - 1^2) - (2 \cdot 0 - 0^2) = 1
\end{aligned}$$

Resposta: $A = 1 \text{ u. a.}$

e) Primeiro vamos encontrar os pontos de interseção das funções:

$$\begin{aligned}
4 - x^2 &= 2 - x \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x' = 2 \text{ e } x'' = -1 \\
4 - x^2 &= x + 2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x' = -2 \text{ e } x'' = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^0 (4 - x^2 - (2 - x)) dx + \int_0^1 (4 - x^2 - (x + 2)) dx \\
&= \int_{-1}^0 (2 + x - x^2) dx + \int_0^1 (2 - x - x^2) dx \\
&= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
&= 0 - \left(2(-1) + \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} \right) + \left(2 \cdot 1 - \frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^3}{3} \right) - 0 \\
&= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 3 - \frac{2}{3} = \frac{9-2}{3} = \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Resposta: $A = \frac{7}{3} u. a.$

- f) A reta passa pelos pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (1, 2)$. Precisamos escrever a equação da reta:

$$\begin{aligned}
y &= ax + b \\
0 &= a \cdot (-1) + b \rightarrow a = b \text{ e } 2a = 2 \rightarrow a = b = 1 \rightarrow y = x + 1 \\
2 &= a \cdot 1 + b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^1 ((2 + x - x^2) - (x + 1)) dx + \int_1^2 (2 + x - x^2) dx \\
&= \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (2 + x - x^2) dx \\
&= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\
&= \left[\left(1 - \frac{1^3}{3} \right) - \left((-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right] \\
&\quad + \left[\left(2 \cdot 2 + \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} \right) - \left(2 \cdot 1 + \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) \right] \\
&= 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 6 - \frac{1}{2} - \frac{9}{3} = 3 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Resposta: $A = \frac{5}{2} u. a.$

P 5.7

Resolução: Vamos esboçar a região cuja área se quer calcular e, nesse caso, precisamos determinar os pontos de interseção das duas funções:

$$x^2 - x + 1 = 3x + 6 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-5)}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

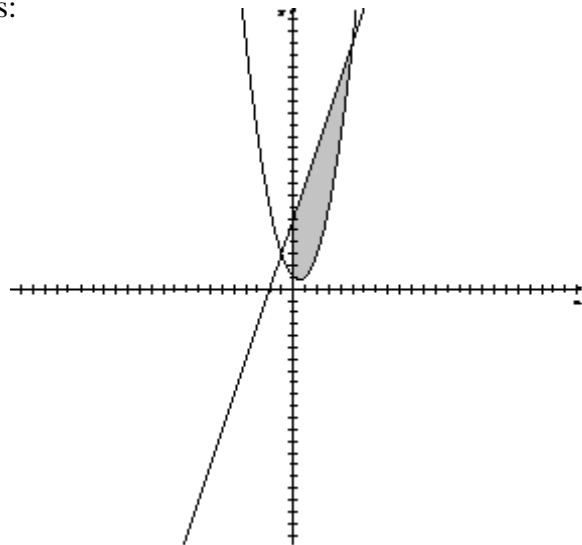
$$\rightarrow x = -1 \text{ e } x = 5$$

$$A = \int_{-1}^5 [3x + 6 - (x^2 - x + 1)] dx$$

$$= \int_{-1}^5 (5 + 4x - x^2) dx = \left[5x + 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^5$$

$$= \left(25 + 2 \cdot 5^2 - \frac{5^3}{3} \right) - \left(-5 + 2 \cdot (-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3} \right)$$

$$= 25 + 50 - \frac{125}{3} + 5 - 2 - \frac{1}{3} = 78 - \frac{126}{3} = \frac{234 - 126}{3} = 36$$



Resposta: $A = 36 \text{ u. a.}$

P5.8

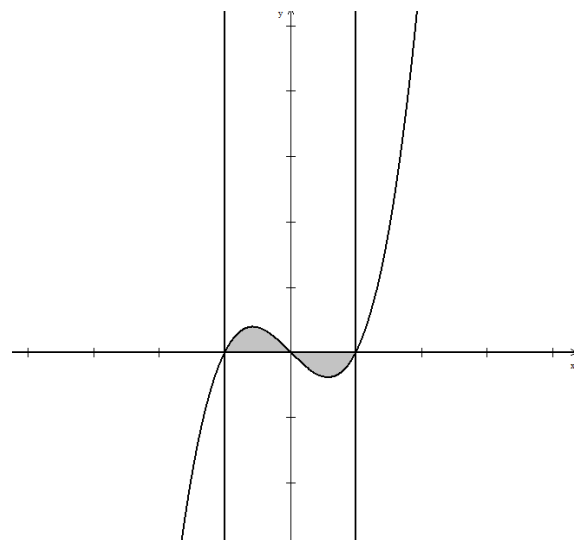
Resolução: Vamos esboçar a região cuja área se quer calcular :

$$A = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx - \int_0^1 (x^3 - x) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= 0 - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} - 0 \right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



Resposta: $A = \frac{1}{2} \text{ u. a.}$

P 5.9

Resolução: Vamos esboçar a região cuja área se quer calcular e, nesse caso, precisamos determinar os pontos de interseção das duas funções:

$$x^2 = \sqrt{x} \rightarrow x^4 - x = 0$$

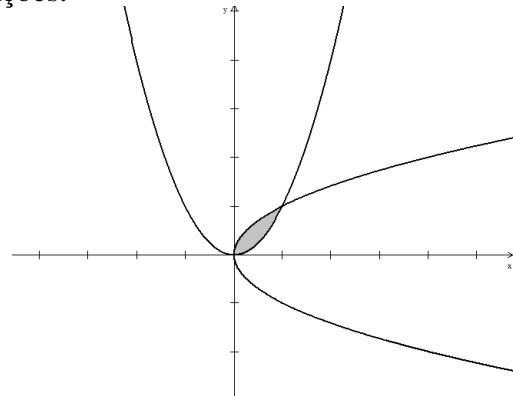
$$\rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \text{ e } x = 1$$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$$

$$= \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

Resposta: $A = \frac{1}{3} \text{ u. a.}$

**P 5.10**

Resolução: Vamos esboçar a região cuja área se quer calcular :

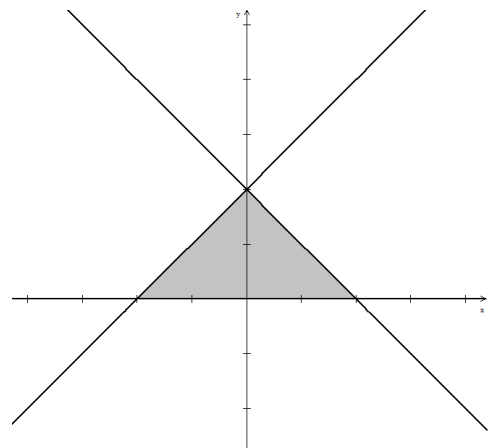
$$A = \int_{-2}^0 (x+2) dx + \int_0^2 (2-x) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^0 + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2$$

$$= 0 - \left(\frac{(-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2) \right) + \left(2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 0 \right)$$

$$= -2 + 4 + 4 - 2 = 4$$

Resposta: $A = 4 \text{ u. a.}$



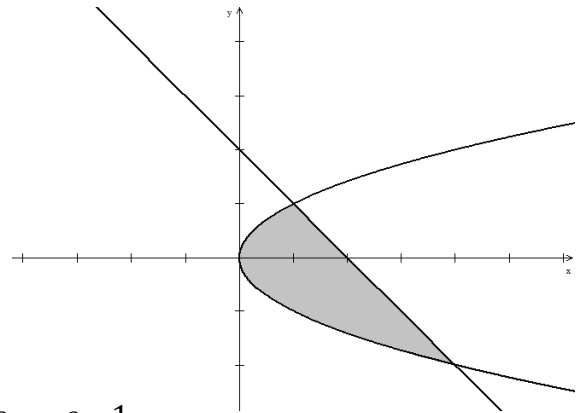
P 5.11

Resolução: Vamos esboçar a região cuja área se quer calcular e verificamos que, neste caso, é melhor integrar em y . Vamos igualar as funções para conhecer os pontos de interseção:

$$y^2 = 2 - y \rightarrow y^2 + y - 2 = 0$$

$$\rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\rightarrow x = -2 \text{ e } x = 1$$



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 (2 - y - y^2) dy = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^1 \\ &= \left(2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left(2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{10 - 1}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Resposta: $A = \frac{9}{2} \text{ u. a.}$

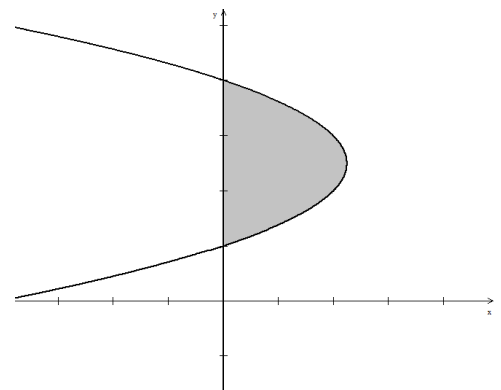
P 5.12

Resolução: Vamos esboçar a região cuja área se quer calcular e verificamos que, neste caso, é melhor integrar em y . Vamos achar as raízes da função:

$$-y^2 + 5y - 4 = 0$$

$$\rightarrow y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(-1)(-4)}}{2(-1)} = \frac{-5 \pm 3}{-2}$$

$$\rightarrow x = 1 \text{ e } x = 4$$



$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^4 (-y^2 + 5y - 4) dy = \left[-\frac{y^3}{3} + 5\frac{y^2}{2} - 4y \right]_1^4 \\
 &= \left(-\frac{4^3}{3} + 5\frac{4^2}{2} - 4 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 5\frac{1^2}{2} - 4 \cdot 1 \right) \\
 &= -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = -\frac{63}{3} + 28 - \frac{5}{2} = \frac{-126 + 168 - 15}{6} \\
 &= \frac{27}{6} = \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

Resposta: $A = \frac{9}{2} \text{ u. a.}$

P 5.13

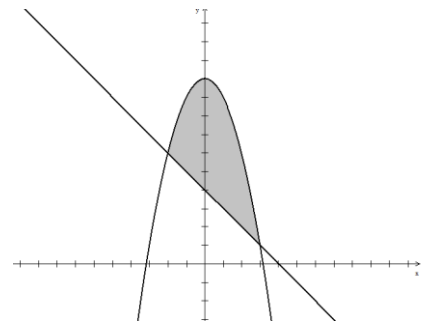
Resolução: Vamos esboçar a região cuja área se quer calcular e, nesse caso, precisamos determinar os pontos de interseção das duas funções:

$$10 - x^2 = 4 - x \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\rightarrow x = -2 \text{ e } x = 3$$

$$A = \int_{-2}^3 [10 - x^2 - (4 - x)] dx$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{-2}^3 (6 + x - x^2) dx = \left[6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^3 = \left(18 + \frac{9}{2} - \frac{27}{3} \right) - \left(-12 + 2 - \frac{(-2)^3}{3} \right) \\
 &= 18 + \frac{9}{2} - 9 + 12 - 2 - \frac{8}{3} = 19 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} = \frac{114 + 27 - 16}{6} = \frac{125}{6}
 \end{aligned}$$

Resposta: $A = \frac{125}{6} \text{ u. a.}$

P 5.15

a)

Resolução:

$$y_m = \frac{1}{5-1} \int_1^5 (3x^2 + 4)x dx = \frac{1}{4} \int_1^5 (3x^3 + 4x) dx = \frac{1}{4} \left[3\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^2}{2} \right]_1^5 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4} 5^4 + 2 \cdot 5^2 - \left(\frac{3}{4} 1^4 + 2 \cdot 1^5 \right) \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{1875}{4} + 50 - \frac{3}{4} - 2 \right) \\
&= \frac{1}{4} (468 + 50 - 2) = \frac{516}{4} = 129
\end{aligned}$$

Resposta: $y_m = 129$.

b)

Resolução:

$$y_m = \frac{1}{1-0} \int_0^1 e^x \cdot \sec^2(e^x + 2) dx$$

Fazendo mudança de variável,

$$u = e^x + 2 \rightarrow du = e^x dx$$

e os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow u = e^0 + 2 = 3$$

$$x = 1 \rightarrow u = e^1 + 2 = e + 2$$

$$y_m = \int_0^1 e^x \cdot \sec^2(e^x + 2) dx = \int_3^{e+2} \sec^2(u) du = [\operatorname{tg} u]_3^{e+2} = \operatorname{tg}(e+2) - \operatorname{tg} 3$$

Resposta: $y_m = \operatorname{tg}(e+2) - \operatorname{tg} 3$.

c)

Resolução:

$$y_m = \frac{1}{\frac{\sqrt[4]{8}}{2} - 0} \int_0^{\frac{\sqrt[4]{8}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{2}{\sqrt[4]{8}} \int_0^{\frac{\sqrt[4]{8}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

Fazendo mudança de variável,

$$u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$$

e os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow u = 0^2 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} \rightarrow u = \left(\frac{\sqrt[4]{8}}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}
y_m &= \frac{2}{\sqrt[4]{8}} \int_0^{\frac{\sqrt[4]{8}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{2}{\sqrt[4]{8}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{8}} [\arcsin u]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \left[\arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \arcsin 0 \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{4\sqrt[4]{8}}
\end{aligned}$$

Resposta: $y_m = \frac{\pi}{4\sqrt[4]{8}}$.

d)

Resolução:

$$y_m = \frac{1}{\sqrt{\pi} - 0} \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin(x^2) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin(x^2) dx$$

Fazendo mudança de variável,

$$u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$$

e os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow u = 0^2 = 0$$

$$x = \sqrt{\pi} \rightarrow u = (\sqrt{\pi})^2 = \pi$$

$$\begin{aligned}
y_m &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin(x^2) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \sin u \frac{du}{2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} [-\cos u]_0^{\pi} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} [-\cos \pi + \cos 0] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (1 + 1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

Resposta: $y_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

e)

Resolução:

$$y_m = \frac{1}{3-2} \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx$$

Esta integral resolve-se por separação em frações parciais,

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

igualando os numeradores,

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$

Substituindo as raízes na igualdade,

Para $x = 1$:

$$1 = A(1+1) + B(1-1) \rightarrow 1 = 2A \rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Para $x = -1$:

$$1 = A(-1+1) + B(-1-1) \rightarrow 1 = -2B \rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned} y_m &= \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx = \int_2^3 \left(\frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} [\ln|x-1| - \ln|x+1|]_2^3 \\ &= \frac{1}{2} [\ln 2 - \ln 4 - \ln 1 + \ln 3] = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 2^2 + \ln 3) \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2 - 2 \ln 2 + \ln 3) = \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

Resposta: $y_m = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right)$.

f)

Resolução:

$$y_m = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin x dx$$

Fazendo mudança de variável,

$$u = \cos x \rightarrow du = -\operatorname{sen} x \, dx$$

e os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow u = \cos 0 = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_1^0 u^2 (-du) = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^0 = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{0^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right] = \frac{2}{3\pi}$$

Resposta: $y_m = \frac{2}{3\pi}$.

P 5.17

a)

Resolução: Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois colocar na fórmula.

$$y' = \frac{3}{4} \rightarrow (y')^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \rightarrow (y')^2 + 1 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{9+16}{16} = \frac{25}{16}$$

Colocando na fórmula,

$$L = \int_0^2 \sqrt{\frac{25}{16}} \, dx = \frac{5}{4} \int_0^2 1 \, dx = \frac{5}{4} [x]_0^2 = \frac{5}{4} (2 - 0) = \frac{5}{2}$$

Resposta: $L = \frac{5}{2}$ u. c.

b)

Resolução: Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois colocar na fórmula.

$$y' = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 2x \times \left(\frac{4}{3} + x^2\right)^{1/2} = \frac{3x}{2} \left(\frac{4}{3} + x^2\right)^{1/2}$$

$$(y')^2 = \left(\frac{3x}{2} \left(\frac{4}{3} + x^2\right)^{1/2}\right)^2 = \frac{9x^2}{4} \left(\frac{4}{3} + x^2\right) = \frac{9x^4}{4} + 3x^2$$

$$1 + (y')^2 = \frac{9x^4}{4} + 3x^2 + 1 = \left(\frac{3x^2}{2} + 1\right)^2$$

Colocando na fórmula,

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{3x^2}{2} + 1\right)^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{3x^2}{2} + 1\right) dx = \left(\frac{3x^3}{6} + x\right) \Big|_1^2 \\ &= \left(\frac{2^3}{2} + 2\right) - \left(\frac{1^3}{2} + 1\right) = 4 + 2 - 1 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{10 - 1}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Resposta: $L = \frac{9}{2} u. c.$

c) $y = \frac{1}{3}(3x + 2)^{3/2}$ em $[0, 1]$.

Resolução: Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois colocar na fórmula.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times 3 \times (3x + 2)^{1/2} = \frac{3}{2} (3x + 2)^{1/2} \\ (y')^2 &= \left(\frac{3}{2} (3x + 2)^{1/2}\right)^2 = \frac{9}{4} (3x + 2) = \frac{27x + 18}{4} \\ 1 + (y')^2 &= \frac{27x + 18}{4} + 1 = \frac{27x + 18 + 4}{4} = \frac{27x + 22}{4} \end{aligned}$$

Colocando na fórmula,

$$L = \int_0^1 \sqrt{\frac{27x + 22}{4}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{27x + 22} dx$$

Vamos fazer mudança de variável,

$$t = 27x + 22 \quad \rightarrow \quad dt = 27dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dt}{27}$$

Mudando os limites de integração,

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad t = 27 \cdot 0 + 22 = 22$$

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad t = 27 \cdot 1 + 22 = 49$$

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \int_0^1 (27x + 22) dx = \frac{1}{2} \int_{22}^{49} \sqrt{t} \frac{dt}{27} = \frac{1}{54} \int_{22}^{49} t^{1/2} dt = \frac{1}{54} \cdot \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_{22}^{49} \\
 &= \frac{1}{81} [49^{3/2} - 22^{3/2}] = \frac{1}{81} [343 - 22\sqrt{22}]
 \end{aligned}$$

Resposta: $L = \frac{1}{81} [343 - 22\sqrt{22}] u. c.$

d)

Resolução: Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois colocar na fórmula.

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times (x+3)^{1/2} = (x+3)^{1/2} \\
 (y')^2 &= \left((x+3)^{1/2} \right)^2 = x+3 \rightarrow 1 + (y')^2 = x+4
 \end{aligned}$$

Colocando na fórmula,

$$L = \int_0^1 \sqrt{x+4} dx$$

Vamos fazer mudança de variável,

$$t = x + 4 \rightarrow dt = dx \rightarrow dx = dt$$

Mudando os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow t = 0 + 4 = 4$$

$$x = 1 \rightarrow t = 1 + 4 = 5$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{x+4} dx = \int_4^5 \sqrt{t} dt = \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_4^5 = \frac{2}{3} [5^{3/2} - 4^{3/2}] = \frac{2}{3} [5\sqrt{5} - 8]$$

Resposta: $L = \frac{2}{3} [5\sqrt{5} - 8] u. c.$

e)

Resolução: Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois colocar na fórmula.

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned}(y')^2 &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \rightarrow 1 + (y')^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} + 1 \\&= \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} + 4}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Colocando na fórmula,

$$\begin{aligned}L &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) dx = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \Big|_0^1 \\&= \left[\left(\frac{e^1 - e^{-1}}{2}\right) - \left(\frac{e^0 - e^{-0}}{2}\right)\right] = \frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e}(e^2 - 1)\end{aligned}$$

Resposta: $L = \frac{1}{2e}(e^2 - 1)u. c.$

f)

Resolução: Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois colocar na fórmula.

$$\begin{aligned}y' &= \frac{2x}{4} - \frac{1}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \\(y')^2 &= \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - 2 \times \frac{x}{2} \times \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} \\1 + (y')^2 &= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} + 1 = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2\end{aligned}$$

Colocando na fórmula,

$$\begin{aligned}L &= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2} dx = \int_1^e \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \ln x\right]_1^e \\&= \left[\left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{2} \ln e\right) - \left(\frac{1^2}{4} + \frac{1}{2} \ln 1\right)\right] = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Resposta: $L = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}u. c.$

g)

Resolução: Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois colocar na fórmula.

$$y' = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times 2x(x^2 + 1)^{1/2} = 2x(x^2 + 1)^{1/2}$$

$$(y')^2 = \left(2x(x^2 + 1)^{1/2}\right)^2 = 4x^2(x^2 + 1) = 4x^4 + 4x^2$$

$$1 + (y')^2 = 4x^4 + 4x^2 + 1 = (2x^2 + 1)^2$$

Colocando na fórmula,

$$L = \int_0^1 \sqrt{(2x^2 + 1)^2} dx = \int_0^1 (2x^2 + 1) dx = \left[2\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{2}{3} + 1 - 0 = \frac{5}{3}$$

Resposta: $L = \frac{5}{3} u.c.$

h)

Resolução: Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois colocar na fórmula.

$$y' = \frac{5x^4}{6} + \frac{-3x^{-4}}{10} = \frac{5x^4}{6} - \frac{3}{10x^4}$$

$$\begin{aligned}(y')^2 &= \left(\frac{5x^4}{6} - \frac{3}{10x^4}\right)^2 = \frac{25x^8}{36} - 2 \times \frac{5x^4}{6} \times \frac{3}{10x^4} + \frac{9}{100x^8} \\&= \frac{25x^8}{36} - \frac{1}{2} + \frac{9}{100x^8} \rightarrow 1 + (y')^2 = \frac{25x^8}{36} - \frac{1}{2} + \frac{9}{100x^8} + 1 \\&= \frac{25x^8}{36} + \frac{1}{2} + \frac{9}{100x^8} = \left(\frac{5x^4}{6} + \frac{3}{10x^4}\right)^2\end{aligned}$$

Colocando na fórmula,

$$\begin{aligned}L &= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{5x^4}{6} + \frac{3}{10x^4}\right)^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{5x^4}{6} + \frac{3}{10x^4}\right) dx = \left[\frac{x^5}{6} - \frac{1}{10x^3}\right]_1^2 \\&= \left[\left(\frac{2^5}{6} - \frac{1}{10 \cdot 2^3}\right) - \left(\frac{1^5}{6} - \frac{1}{10 \cdot 1^3}\right)\right] = \frac{32}{6} - \frac{1}{80} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \\&= \frac{1280 - 3 - 40 + 24}{240} = \frac{1261}{240}\end{aligned}$$

Resposta: $L = \frac{1261}{240} u.c.$

i)

Resolução: Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois colocar na fórmula.

$$y' = \frac{3}{2}x^{1/2} \rightarrow (y')^2 = \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2 = \frac{9x}{4} \rightarrow 1 + (y')^2 = \frac{9x}{4} + 1 = \frac{9x + 4}{4}$$

Colocando na fórmula,

$$L = \int_0^2 \sqrt{\frac{9x + 4}{4}} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{9x + 4} dx$$

Vamos fazer mudança de variável,

$$t = 9x + 4 \rightarrow dt = 9dx \rightarrow dx = \frac{dt}{9}$$

Mudando os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow t = 9 \cdot 0 + 4 = 4$$

$$x = 2 \rightarrow t = 9 \cdot 2 + 4 = 22$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{9x + 4} dx = \frac{1}{2} \int_4^{22} \sqrt{t} \frac{dt}{9} = \frac{1}{18} \int_4^{22} t^{1/2} dt = \frac{1}{18} \cdot \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_4^{22} \\ &= \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} [22^{3/2} - 4^{3/2}] = \frac{1}{27} [22\sqrt{22} - 8] \end{aligned}$$

Resposta: $L = \frac{1}{27} [22\sqrt{22} - 8] u. c.$

j)

Resolução: Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois colocar na fórmula.

$$y' = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

$$(y')^2 = (-\operatorname{tg} x)^2 = \operatorname{tg}^2 x \rightarrow 1 + (y')^2 = \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

Colocando na fórmula,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = [\ln|\sec x + \operatorname{tg} x|]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left[\ln \left| \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| - \ln|\sec(0) + \operatorname{tg}(0)| \right] = \ln(\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

Resposta: $L = \ln(\sqrt{2} + 1) u. c.$

P 5.19

a)

Resolução:

Aplicando diretamente a fórmula, temos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^1 [(2x - 1)^5]^2 dx = \pi \int_0^1 (2x - 1)^{10} dx$$

Fazendo mudança de variável,

$$t = 2x - 1 \quad \rightarrow \quad dt = 2dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dt}{2}$$

Mudando os limites de integração,

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad t = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad t = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$V = \pi \int_0^1 (2x - 1)^{10} dx = \pi \int_{-1}^1 t^{10} \frac{dt}{2} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{t^{11}}{11} \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{22} [1^{11} - (-1)^{11}] = \frac{\pi}{11}$$

Resposta: $V = \frac{\pi}{11}$ u. v.

b)

Resolução:

Aplicando diretamente a fórmula, temos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^2 \left[\frac{2}{3} x^2 \right]^2 dx = \frac{4\pi}{9} \int_1^2 x^4 dx = \frac{4\pi}{9} \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \frac{4\pi}{45} [2^5 - 1^5]$$

$$= \frac{124\pi}{45}$$

Resposta: $V = \frac{124\pi}{45}$ u. v.

c)

Resolução:

Aplicando diretamente a fórmula, temos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^2 [\sqrt{x} \cdot e^x]^2 dx = \pi \int_1^2 x e^{2x} dx$$

Integrando por partes,

$$u = x \rightarrow du = 1 dx$$

$$dv = e^{2x} \rightarrow v = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}$$

Aplicando a fórmula da integração por partes,

$$I = \int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 x e^{2x} dx = \pi \left(\left[x \cdot \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{2} dx \right) = \pi \left(\left[x \cdot \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 - \left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_1^2 \right) \\ &= \pi \left(\left[2 \cdot \frac{e^4}{2} - 1 \cdot \frac{e^2}{2} \right]_1^2 - \left[\frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{4} \right]_1^2 \right) = \pi \left(e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} (4e^4 - 2e^2 - e^4 + e^2) = \frac{\pi}{4} (3e^4 - e^2) \end{aligned}$$

Resposta: $V = \frac{\pi}{4} (3e^4 - e^2) u \cdot v.$

d)

Resolução:

Aplicando diretamente a fórmula, temos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^2 [x e^{x^3}]^2 dx = \pi \int_1^2 x^2 e^{2x^3} dx$$

Fazendo mudança de variável,

$$t = 2x^3 \rightarrow dt = 6x^2 dx \rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{6}$$

Mudando os limites de integração,

$$x = 1 \rightarrow t = 2 \cdot 1^3 = 2$$

$$x = 2 \rightarrow t = 2 \cdot 2^3 = 16$$

$$V = \pi \int_1^2 x^2 e^{2x^3} dx = \pi \int_2^{16} e^t \frac{dt}{6} = \frac{\pi}{6} [e^t]_2^{16} = \frac{\pi}{6} (e^{16} - e^2)$$

Resposta: $V = \frac{\pi}{6} (e^{16} - e^2)$ u. v.

e)

Resolução:

Aplicando diretamente a fórmula, temos:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^1 [e^x \sqrt{e^x + 1}]^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} (e^x + 1) dx \\ &= \pi \int_0^1 (e^{3x} + e^{2x}) dx = \pi \left[\frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6} [2(e^3 - e^0) + 3(e^2 - e^0)] = \frac{\pi}{6} (2e^3 + 3e^2 - 5) \end{aligned}$$

Resposta: $V = \frac{\pi}{6} (2e^3 + 3e^2 - 5)$ u. v.

f)

Resolução:

Aplicando diretamente a fórmula, temos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sec x \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x}]^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x dx$$

Fazendo mudança de variável,

$$t = \operatorname{tg} x \quad \rightarrow \quad dt = \sec^2 x dx$$

Mudando os limites de integração,

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad t = \operatorname{tg} 0 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad t = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x dx = \pi \int_0^1 t \cdot dt = \pi \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Resposta: $V = \frac{\pi}{2}$ u. v.

g)

Resolução:

Aplicando diretamente a fórmula, temos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left[x^{3/2} (x^2 + 1)^{1/4} \right]^2 dx = \pi \int_0^{\sqrt{3}} x^3 (x^2 + 1)^{1/2} dx$$

Fazendo mudança de variável,

$$t = x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad dt = 2x dx \quad \rightarrow \quad x dx = \frac{dt}{2} \quad \rightarrow \quad t = x^2 + 1$$

Mudando os limites de integração,

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0^2 + 1 = 1$$

$$x = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{3}^2 + 1 = 4$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \cdot x (x^2 + 1)^{1/2} dx = \pi \int_1^4 (t - 1) (t)^{1/2} \frac{dt}{2} = \frac{\pi}{2} \int_1^4 (t^{3/2} - t^{1/2}) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{t^{5/2}}{5/2} - \frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_1^4 = \pi \left[\left(\frac{4^{5/2}}{5} - \frac{4^{3/2}}{3} \right) - \left(\frac{1^{5/2}}{5} - \frac{1^{3/2}}{3} \right) \right] \\ &= \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \pi \left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3} \right) = \frac{\pi}{15} (93 - 35) = \frac{58\pi}{15} \end{aligned}$$

Resposta: $V = \frac{58\pi}{15} \text{ u. v.}$ **P 5.20**

a)

Resolução:

Vamos escrever $y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y}$. Aplicando a fórmula em y, temos:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy = \pi \int_0^4 [\sqrt{y}]^2 dy = \pi \int_0^4 y \cdot dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} \right)_0^4 = \pi \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

Resposta: $V = 8\pi \text{ u. v.}$

b)

Resolução:

Vamos escrever $x^2 = y(e^y + 1) \rightarrow x = \sqrt{y(e^y + 1)}$. Aplicando a fórmula, temos:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy = \pi \int_0^1 \left[\sqrt{y(e^y + 1)} \right]^2 dy = \pi \int_0^1 y(e^y + 1) dy \\ &= \pi \int_0^1 ye^y dy + \pi \int_0^1 y dy \end{aligned}$$

A primeira integral é resolvida por partes e a segunda é imediata,

$$u = y \rightarrow du = 1 dy$$

$$dv = e^y \rightarrow v = \int e^y dy = e^y$$

Aplicando a fórmula da integração por partes,

$$I = \int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 ye^y dy + \pi \int_0^1 y dy = \pi \left[(ye^y)_0^1 - \int_0^1 e^y dy + \left(\frac{y^2}{2} \right)_0^1 \right] \\ &= \pi \left[(1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - (e^y)_0^1 + \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) \right] = \pi \left(e - e + 1 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Resposta: $V = \frac{3\pi}{2} u \cdot v$.

c)

Resolução:

Vamos aplicar a fórmula,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy = \pi \int_1^2 [y^2]^2 dy = \pi \int_1^2 y^4 dy = \pi \left(\frac{y^5}{5} \right)_1^2 = \frac{\pi}{5} (2^5 - 1^5) \\ &= \frac{31\pi}{5} \end{aligned}$$

Resposta: $V = \frac{31\pi}{5} u \cdot v$.

d)

Vamos aplicar a fórmula,

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy = \pi \int_0^1 [y^3]^2 dy = \pi \int_0^1 y^6 dy = \pi \left(\frac{y^7}{7} \right)_0^1 = \frac{\pi}{7} (1^7 - 0^7) = \frac{\pi}{7}$$

Resposta: $V = \frac{\pi}{7} u. v.$

e)

Resolução:

Vamos escrever $x = \frac{1}{y}$. Aplicando a fórmula, temos:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy = \pi \int_1^2 [y^{-1}]^2 dy = \pi \int_1^2 y^{-2} dy = \pi \left(-\frac{1}{y} \right)_1^2 = -\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Resposta: $V = \frac{\pi}{2} u. v.$

f)

Resolução:

Vamos aplicando a fórmula, temos:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy = \pi \int_1^3 (y - 1) dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} - y \right)_1^3 \\ &= \pi \left[\left(\frac{3^2}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) \right] = \pi \left(\frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + 1 \right) = \pi(4 - 3 + 1) \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Resposta: $V = 2\pi u. v.$

P 5.22

a)

Resolução:

Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois aplicar a fórmula.

$$y = \sqrt{2x+1} \rightarrow y' = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$$

$$\begin{aligned} (y')^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}} \right)^2 = \frac{1}{2x+1} \rightarrow 1 + (y')^2 = \frac{1}{2x+1} + 1 = \frac{1}{2x+1} + \frac{2x+1}{2x+1} \\ &= \frac{2x+2}{2x+1} \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula,

$$\begin{aligned} A_L &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} \sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}} dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} \frac{\sqrt{2x+2}}{\sqrt{2x+1}} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2x+2} dx \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável,

$$t = 2x + 2 \rightarrow dt = 2dx \rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

Mudando os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow t = 2 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$x = 1 \rightarrow t = 2 \cdot 1 + 2 = 4$$

$$\begin{aligned} A_L &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{2x+2} dx = 2\pi \int_2^4 \sqrt{t} \frac{dt}{2} = \pi \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_2^4 = \frac{2\pi}{3} (4^{3/2} - 2^{3/2}) \\ &= \frac{2\pi}{3} (8 - 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Resposta: $A_L = \frac{2\pi}{3} (8 - 2\sqrt{2})$ u. a.

b)

Resolução:

Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois aplicar a fórmula.

$$y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(y')^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{4x} \rightarrow 1 + (y')^2 = \frac{1}{4x} + 1 = \frac{1}{4x} + \frac{4x}{4x} = \frac{4x + 1}{4x}$$

Aplicando a fórmula,

$$\begin{aligned} A_L &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{\frac{4x + 1}{4x}} dx = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x} \frac{\sqrt{4x + 1}}{\sqrt{4}\sqrt{x}} dx \\ &= \pi \int_0^2 \sqrt{4x + 1} dx \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável,

$$t = 4x + 1 \rightarrow dt = 4dx \rightarrow dx = \frac{dt}{4}$$

Mudando os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow t = 4 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$x = 2 \rightarrow t = 4 \cdot 2 + 1 = 9$$

$$\begin{aligned} A_L &= \pi \int_0^2 \sqrt{4x + 1} dx = \pi \int_1^9 \sqrt{t} \frac{dt}{4} = \frac{\pi}{4} \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_1^9 = \frac{\pi}{6} (9^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{\pi}{6} (27 - 1) \\ &= \frac{26\pi}{6} = \frac{13\pi}{3} \end{aligned}$$

Resposta: $A_L = \frac{13\pi}{3} \text{ u. a.}$

c)

Resolução:

Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois aplicar a fórmula.

$$y = x^3 \rightarrow y' = 3x^2$$

$$(y')^2 = (3x^2)^2 = 9x^4 \rightarrow 1 + (y')^2 = 9x^4 + 1$$

Aplicando a fórmula,

$$A_L = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^2 x^3 \sqrt{9x^4 + 1} dx =$$

Fazendo mudança de variável,

$$t = 9x^4 + 1 \rightarrow dt = 36x^3 dx \rightarrow x^3 dx = \frac{dt}{36}$$

Mudando os limites de integração,

$$x = 0 \rightarrow t = 9 \cdot 0^4 + 1 = 1$$

$$x = 2 \rightarrow t = 9 \cdot 2^4 + 1 = 145$$

$$\begin{aligned} A_L &= 2\pi \int_0^2 x^3 \sqrt{9x^4 + 1} dx = 2\pi \int_1^{145} \sqrt{t} \frac{dt}{36} = \frac{\pi}{18} \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_1^{145} = \frac{\pi}{27} (145^{3/2} - 1^{3/2}) \\ &= \frac{\pi}{27} (145\sqrt{145} - 1) \end{aligned}$$

Resposta: $A_L = \frac{\pi}{27} (145\sqrt{145} - 1) u. a.$

d)

Resolução:

Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois aplicar a fórmula.

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \rightarrow y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (y')^2 &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \rightarrow 1 + (y')^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} + 1 \\
 &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2
 \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula,

$$\begin{aligned}
 A_L &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2} dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2} \right]_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{e^{2.1}}{2} + 2.1 - \frac{e^{-2.1}}{2} \right) - \left(\frac{e^{2.0}}{2} + 2.0 - \frac{e^{-2.0}}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{\pi}{4} (e^2 + 2 - e^{-2} - 1 + 1) = \frac{\pi}{4} (e^2 + 2 - e^{-2})
 \end{aligned}$$

Resposta: $A_L = \frac{\pi}{4} (e^2 + 2 - e^{-2})$ u. a.

e)

Resolução:

Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois aplicar a fórmula.

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt{1 + e^x} \rightarrow y' = \frac{e^x}{2\sqrt{1 + e^x}} \\
 (y')^2 &= \left(\frac{e^x}{2\sqrt{1 + e^x}} \right)^2 = \frac{e^{2x}}{4(1 + e^x)} \rightarrow 1 + (y')^2 = \frac{e^{2x}}{4(1 + e^x)} + 1 \\
 &= \frac{e^{2x}}{4(1 + e^x)} + \frac{4(1 + e^x)}{4(1 + e^x)} = \frac{e^{2x} + 4e^x + 4}{4(1 + e^x)} = \frac{(e^x + 2)^2}{4(1 + e^x)}
 \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula,

$$\begin{aligned}
A_L &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + e^x} \sqrt{\frac{(e^x + 2)^2}{4(1 + e^x)}} dx \\
&= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + e^x} \frac{\sqrt{(e^x + 2)^2}}{\sqrt{4}\sqrt{(1 + e^x)}} dx = \pi \int_0^1 (e^x + 2) dx \\
&= \pi [e^x + 2x]_0^1 = \pi[(e^1 + 2.1) - (e^0 + 2.0)] = \pi(e + 2 - 1) \\
&= \pi(e + 1)
\end{aligned}$$

Resposta: $A_L = \pi(e + 1) u. a.$

f)

Resolução:

Primeiro vamos derivar, elevar ao quadrado, somar um para depois aplicar a fórmula.

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x} \rightarrow y' = \frac{3x^2}{6} - \frac{1}{2x^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$$

$$(y')^2 = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} \right)^2 = \frac{x^4}{2} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^4} = \frac{x^4}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}$$

$$1 + (y')^2 = \frac{x^4}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4} + 1 = \frac{x^4}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} \right)^2$$

Aplicando a fórmula,

$$\begin{aligned}
A_L &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_1^2 \left(\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x} \right) \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} \right)^2} dx \\
&= \pi \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} \right) \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} \right) dx = \frac{\pi}{2} \int_1^2 \left(\frac{x^5}{3} + \frac{x}{3} + x + x^{-3} \right) dx = \\
&= \frac{\pi}{2} \left[\frac{x^6}{18} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-2}}{2} \right]_1^2 \\
&= \frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{2^6}{9} + \frac{2^2}{3} + 2^2 - 2^{-2} \right) - \left(\frac{1^6}{9} + \frac{1^2}{3} + 1^2 - 1^{-2} \right) \right] \\
&= \frac{\pi}{4} \left(\frac{64}{9} + \frac{4}{3} + 4 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1 + 1 \right) \\
&= \frac{\pi}{144} (256 + 48 + 144 - 9 - 4 - 12) = \frac{423\pi}{144} = \frac{47\pi}{16}
\end{aligned}$$

Resposta: $A_L = \frac{47\pi}{16} \text{ u. a.}$

P 5.24

a)

Resolução: Vamos fazer as derivadas para depois aplicar na fórmula:

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2 + 1)$$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x^2 + 1) + x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} = \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

$$f''(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} + \frac{4x(x^2 + 1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2}{x^2 + 1} + \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

Aplicando no ponto $x = 2$, temos:

$$f'(2) = \ln(2^2 + 1) + \frac{2 \cdot 2^2}{2^2 + 1} = \ln 5 + \frac{8}{5}$$

$$f''(2) = \frac{2 \cdot 2^2}{2^2 + 1} + \frac{4 \cdot 2}{(2^2 + 1)^2} = \frac{8}{5} + \frac{8}{25} = \frac{48}{25}$$

$$K = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{\frac{48}{25}}{\left[1 + \left(\ln 5 + \frac{8}{5} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{48}{25 \left[1 + \left(\ln 5 + \frac{8}{5} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

O raio de curvatura é:

$$R = \frac{1}{|K|} = \frac{25 \left[1 + \left(\ln 5 + \frac{8}{5} \right)^2 \right]^{3/2}}{48}$$

b)

Resolução: Vamos fazer as derivadas para depois aplicar na fórmula:

$$f(x) = e^{2x} \rightarrow f'(x) = 2e^{2x} \rightarrow f''(x) = 4e^{2x}$$

Aplicando a fórmula no ponto $x = 0$, temos:

$$K = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{4}{[1 + (2)^2]^{3/2}} = \frac{4}{5^{3/2}} = \frac{4}{5\sqrt{5}}$$

O raio de curvatura é:

$$R = \frac{1}{|K|} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

c)

Resolução: Vamos fazer as derivadas para depois aplicar na fórmula:

$$f(x) = 2^{\sec x} \rightarrow f'(x) = 2^{\sec x} \cdot \ln 2 \cdot \sec x \cdot \operatorname{tg} x$$

$$f''(x) = 2^{\sec x} \ln 2 \cdot \sec x \cdot \operatorname{tg} x + 2^{\sec x} \ln 2 \cdot \sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x + 2^{\sec x} \ln 2 \cdot \sec^3 x$$

Aplicando a fórmula no ponto $x = 0$, temos:

$$K = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{2 \cdot \ln 2}{[1 + (0)^2]^{3/2}} = \frac{2 \ln 2}{1^{3/2}} = 2 \ln 2$$

O raio de curvatura é:

$$R = \frac{1}{|K|} = \frac{1}{2 \ln 2}$$

P 5.26

a)

Resolução: Vamos fazer as derivadas para depois aplicar na fórmula:

$$\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 1 - \sin t \\ \dot{y} = 1 - \cos t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \cos t \\ \ddot{y} = \sin t \end{cases}$$

Aplicando a fórmula no ponto $t = 1$, temos:

$$K = \frac{\dot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{0.1 - 0.1}{[1^2 + 0^2]^{3/2}} = 0$$

O raio de curvatura é:

$$R = \frac{1}{|K|} = \frac{1}{|0|} = \infty$$

b)

Resolução: Vamos fazer as derivadas para depois aplicar na fórmula:

$$\begin{cases} x = \ln(2t + 1) \\ y = t^2 + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{2}{2t + 1} \\ \dot{y} = 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{-4}{(2t + 1)^2} \\ \ddot{y} = 2 \end{cases}$$

Aplicando a fórmula no ponto $t = 1$, temos:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\dot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{2 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \left(\frac{-4}{9}\right)}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2^2\right]^{3/2}} = \frac{\frac{20}{9}}{\sqrt{\frac{40}{36}}} = \frac{20}{9} \times \frac{6}{\sqrt{40}} = \frac{40}{3\sqrt{40}} = \frac{40\sqrt{40}}{3 \cdot 40} \\ &= \frac{2\sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

O raio de curvatura é:

$$R = \frac{1}{|K|} = \frac{3}{2\sqrt{10}}$$

c)

Resolução: Vamos fazer as derivadas para depois aplicar na fórmula:

$$\begin{cases} x = t^2 e^t \\ y = t^4 + t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 2te^t + t^2 e^t \\ \dot{y} = 4t^3 + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 2e^t + 4te^t + t^2 e^t \\ \ddot{y} = 12t^2 \end{cases}$$

Aplicando a fórmula no ponto $t = 0$, temos:

$$K = \frac{\dot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{0 \cdot 0 - 1 \cdot 2}{[0^2 + 1^2]^{3/2}} = -2$$

O raio de curvatura é:

$$R = \frac{1}{|K|} = \frac{1}{|-2|} = \frac{1}{2}$$

P 5.28

a)

Resolução: Vamos preparar os passos antes de aplicar a fórmula, ou seja, calcular as derivadas, elevar ao quadrado e somá-las:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2t - e \rightarrow (\dot{x})^2 = (2t - e)^2 = 4t^2 - 4et + e^2 \\ \dot{y} &= \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \sqrt{2et}^{1/2} \rightarrow (\dot{y})^2 = \left(2\sqrt{2et}^{1/2}\right)^2 = 8et\end{aligned}$$

Somando as duas,

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = 4t^2 - 4et + e^2 + 8et = 4t^2 + 4et + e^2 = (2t + e)^2$$

Aplicando na fórmula,

$$\begin{aligned}L &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^1 \sqrt{(2t + e)^2} dt = \int_0^1 (2t + e) dt = [t^2 + et]_0^1 \\ &= [(1^2 + e \cdot 1) - (0^2 + e \cdot 0)] = 1 + e\end{aligned}$$

Resposta: $L = (1 + e) u. c.$

b)

Resolução: Vamos preparar os passos antes de aplicar a fórmula, ou seja, calcular as derivadas, elevar ao quadrado e somá-las:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2(-\sin t + \sin t + t \cdot \cos t) \rightarrow (\dot{x})^2 = (t \cdot \cos t)^2 = t^2 \cos^2 t \\ \dot{y} &= 2(\cos t - \cos t + t \cdot \sin t) \rightarrow (\dot{y})^2 = (t \cdot \sin t)^2 = t^2 \sin^2 t\end{aligned}$$

Somando as duas,

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t = t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = t^2$$

Aplicando na fórmula,

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^\pi \sqrt{t^2} dt = \int_0^\pi t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

Resposta: $L = \frac{\pi^2}{2} u. c.$

c)

Resolução: Vamos preparar os passos antes de aplicar a fórmula, ou seja, calcular as derivadas, elevar ao quadrado e somá-las:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t \rightarrow (\dot{x})^2 = (e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)^2 = e^{2t}(\operatorname{sen}^2 t + 2 \operatorname{sen} t \cos t + \cos^2 t) \\ \dot{y} &= e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t \rightarrow (\dot{y})^2 = (e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)^2 = e^{2t}(\cos^2 t - 2 \operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen}^2 t)\end{aligned}$$

Somando as duas,

$$\begin{aligned}(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 &= e^{2t}(\operatorname{sen}^2 t + 2 \operatorname{sen} t \cos t + \cos^2 t) + e^{2t}(\cos^2 t - 2 \operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen}^2 t) \\ &= e^{2t}(2)\end{aligned}$$

Aplicando na fórmula,

$$\begin{aligned}L &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t dt = \sqrt{2} [e^t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \left[e^{\frac{\pi}{2}} - e^0 \right] \\ &= \sqrt{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right)\end{aligned}$$

Resposta: $L = \sqrt{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right) u.c.$

d)

Resolução: Vamos preparar os passos antes de aplicar a fórmula, ou seja, calcular as derivadas, elevar ao quadrado e somá-las:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2 \cos(2t) \rightarrow (\dot{x})^2 = (2 \cos(2t))^2 = 4 \cos^2(2t) \\ \dot{y} &= 2 \operatorname{sen}(2t) \rightarrow (\dot{y})^2 = (2 \operatorname{sen}(2t))^2 = 4 \operatorname{sen}^2(2t)\end{aligned}$$

Somando as duas,

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = 4 \cos^2(2t) + 4 \operatorname{sen}^2(2t) = 4$$

Aplicando na fórmula,

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dt = [2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Resposta: $L = \pi u.c.$

e)

Resolução: Vamos preparar os passos antes de aplicar a fórmula, ou seja, calcular as derivadas, elevar ao quadrado e somá-las:

$$\dot{x} = \frac{2}{t} \rightarrow (\dot{x})^2 = \left(\frac{2}{t}\right)^2 = \frac{4}{t^2}$$

$$\dot{y} = 1 - \frac{1}{t^2} \rightarrow (\dot{y})^2 = \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}$$

Somando as duas,

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = 1 - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4} + \frac{4}{t^2} = 1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4} = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2$$

Aplicando na fórmula,

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_1^2 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2} dt = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = \left[t - \frac{1}{t}\right]_1^2$$

$$= \left[\left(2 - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{1}\right)\right] = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2}$$

Resposta: $L = \frac{3}{2} u. c.$

f)

Resolução: Vamos preparar os passos antes de aplicar a fórmula, ou seja, calcular as derivadas, elevar ao quadrado e somá-las:

$$\dot{x} = 2t \rightarrow (\dot{x})^2 = (2t)^2 = 4t^2$$

$$\dot{y} = t^2 - 1 \rightarrow (\dot{y})^2 = (t^2 - 1)^2 = t^4 - 2t^2 + 1$$

Somando as duas,

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = 4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1 = t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2 + 1)^2$$

Aplicando na fórmula,

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^1 \sqrt{(t^2 + 1)^2} dt = \int_0^1 (t^2 + 1) dt = \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^1$$

$$= \left[\left(\frac{1^3}{3} + 1\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 0\right)\right] = \frac{1}{3} + 1 = \frac{1 + 3}{3} = \frac{4}{3}$$

Resposta: $L = \frac{4}{3} u. c.$

P 5.30

a)

Resolução: Vamos calcular a derivada antes de aplicar a fórmula:

$$\dot{x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} [y]^2 \dot{x} dt = \pi \int_0^1 [\sqrt{t}]^2 \frac{1}{1+t^2} dt = \pi \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt$$

Fazendo mudança de variável,

$$u = 1 + t^2 \quad \rightarrow \quad du = 2t dt \quad \rightarrow \quad \frac{du}{2} = t dt$$

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad u = 1 + 0^2 = 1$$

$$t = 1 \quad \rightarrow \quad u = 1 + 1^2 = 2$$

Então,

$$V = \pi \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \pi \int_1^2 \frac{1}{u} \frac{du}{2} = \frac{\pi}{2} [\ln u]_1^2 = \frac{\pi}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

Resposta: $V = \frac{\pi}{2} \ln 2$ u. v.

b)

Resolução: Vamos calcular a derivada antes de aplicar a fórmula:

$$\dot{x} = 1$$

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} [y]^2 \dot{x} dt = \pi \int_0^1 [(2t-1)^4]^2 1 dt = \pi \int_0^1 (2t-1)^8 dt$$

Fazendo mudança de variável,

$$u = 2t - 1 \quad \rightarrow \quad du = 2 dt \quad \rightarrow \quad \frac{du}{2} = dt$$

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad u = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$t = 1 \quad \rightarrow \quad u = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Então,

$$V = \pi \int_{-1}^1 u^8 \frac{du}{2} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 u^8 du = \frac{\pi}{2} \left[\frac{u^9}{9} \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{18} (1^9 - (-1)^9) = \frac{\pi}{9}$$

Resposta: $V = \frac{\pi}{9} u.v.$

c)

Resolução: Vamos calcular a derivada antes de aplicar a fórmula:

$$\dot{x} = 4t$$

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} [y]^2 \dot{x} dt = \pi \int_0^1 [e^t]^2 4t dt = 4\pi \int_0^1 t e^{2t} dt$$

Fazendo integração por partes,

$$u = t \quad \rightarrow \quad du = dt$$

$$dv = e^{2t} \quad \rightarrow \quad v = \frac{e^{2t}}{2}$$

Então,

$$\begin{aligned} V &= 4\pi \int_0^1 t e^{2t} dt = 4\pi \left[\left(t \frac{e^{2t}}{2} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2t}}{2} dt \right] = 2\pi \left[t e^{2t} - \frac{e^{2t}}{2} \right] \Big|_0^1 \\ &= \pi [(2.1. e^{2.1} - e^{2.1}) - (2.0. e^{2.0} - e^{2.0})] = 2\pi(2e^2 - e^2 + 1) \\ &= 2\pi(e^2 + 1) \end{aligned}$$

Resposta: $V = 2\pi(e^2 + 1) u.v.$

d)

Resolução: Vamos calcular a derivada antes de aplicar a fórmula:

$$\dot{x} = 3t^2$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{t_1}^{t_2} [y]^2 \dot{x} dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\sec t}{t} \right]^2 3t^2 dt = 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 t dt = 3\pi [\operatorname{tg} t] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 3\pi \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) - \tan 0 \right) = 3\pi \end{aligned}$$

Resposta: $V = 3\pi u.v.$

e)

Resolução: Vamos calcular a derivada antes de aplicar a fórmula:

$$\dot{x} = \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{t_1}^{t_2} [y]^2 \dot{x} dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\operatorname{sen} t]^2 \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t} dt = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t} \cdot \operatorname{sen} t dt \\ &= -\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \cos^2 t)}{\cos t} \cdot \operatorname{sen} t dt \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável,

$$u = \cos t \quad \rightarrow \quad du = -\operatorname{sen} t dt$$

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad u = \cos 0 = 1$$

$$t = \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad u = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(1 - u^2)}{u} du = \pi \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{u} - u\right) du = \pi \left[\ln u - \frac{u^2}{2} \right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(2 \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 2 \cdot \ln 1 + 1^2 \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(2 \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{1}{2} - 2 + 1 \right) = \frac{\pi}{2} \left(2 \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{1 + 2}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(2 \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

Resposta: $V = \frac{\pi}{2} \left(2 \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{3}{2} \right) u.v.$

f)

Resolução: Vamos calcular a derivada antes de aplicar a fórmula:

$$\dot{x} = \frac{\sec t \cdot \operatorname{tg} t}{\sec t} = \operatorname{tg} t$$

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} [y]^2 \dot{x} dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sec t]^2 \operatorname{tg} t dt$$

Fazendo mudança de variável,

$$u = \operatorname{tg} t \quad \rightarrow \quad du = \sec^2 t dt$$

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad u = \operatorname{tg} 0 = 0$$

$$t = 1 \quad \rightarrow \quad u = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1$$

Então,

$$V = \pi \int_0^1 u du = \pi \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} (1^2 - 0^2) = \frac{\pi}{2}$$

Resposta: $V = \frac{\pi}{2} u. v.$

g)

Resolução: Vamos calcular a derivada antes de aplicar a fórmula:

$$\dot{x} = 2 \cos(2t)$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{t_1}^{t_2} [y]^2 \dot{x} dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(\operatorname{sen}(2t))^{3/2}]^2 2 \cos(2t) dt \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^3(2t) \cos(2t) dt \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável,

$$u = \operatorname{sen}(2t) \quad \rightarrow \quad du = 2 \cos(2t) dt$$

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad u = \operatorname{sen}(2 \cdot 0) = 0$$

$$t = \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad u = \operatorname{sen} \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

Então,

$$V = 2\pi \int_0^1 u^3 du = 2\pi \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} (1^4 - 0^4) = \frac{\pi}{2}$$

Resposta: $V = \frac{\pi}{2} u. v.$

h)

Resolução: Vamos calcular a derivada antes de aplicar a fórmula:

$$\dot{x} = 3t^2 + 2$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{t_1}^{t_2} [y]^2 \dot{x} dt = \pi \int_1^2 [\sqrt{3t+2}]^2 (3t^2 + 2) dt = \pi \int_1^2 (3t+2)(3t^2 + 2) dt \\ &= \pi \int_1^2 (9t^3 + 6t + 6t^2 + 4) dt = \pi \left[9\frac{t^4}{4} + 6\frac{t^2}{2} + 6\frac{t^3}{3} + 4t \right]_1^2 \\ &= \pi \left[\left(9\frac{2^4}{4} + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 \right) - \left(9\frac{1^4}{4} + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 \right) \right] \\ &= \pi \left(36 + 12 + 16 + 8 - \frac{9}{4} - 3 - 2 - 4 \right) = \pi \left(63 - \frac{9}{4} \right) = \frac{243}{4} \pi \end{aligned}$$

Resposta: $V = \frac{243}{4} \pi u. v.$

i)

Resolução: Vamos calcular a derivada antes de aplicar a fórmula:

$$\dot{x} = \operatorname{sen} t$$

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} [y]^2 \dot{x} dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sqrt{\operatorname{sen} t}]^2 \operatorname{sen} t dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t dt$$

Aplicando a tabela de integrais,

$$V = \pi \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2 \cdot \frac{\pi}{2}) \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2 \cdot 0) \right) \right] = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

Resposta: $V = \frac{\pi^2}{4} u. v.$ **P 5.32**

$$\text{a) } \begin{cases} x = e^t \\ y = e^t + 1 \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

Resolução: Vamos calcular as derivadas, elevar ao quadrado e somá-las:

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = e^t & \rightarrow (\dot{x})^2 = (e^t)^2 = e^{2t} \\ \dot{y} = e^t & \rightarrow (\dot{y})^2 = (e^t)^2 = e^{2t} \end{array}$$

Somando as duas,

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = e^{2t} + e^{2t} = 2e^{2t}$$

Aplicando na fórmula,

$$\begin{aligned} A_L &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dx = 2\pi \int_0^1 (e^t + 1) \sqrt{2e^{2t}} dt = 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 (e^{2t} + e^t) dt \\ &= 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{e^{2t}}{2} + e^t \right]_0^1 = \sqrt{2}\pi [e^{2 \cdot 1} + e^1 - e^{2 \cdot 0} - e^0] \\ &= \sqrt{2}\pi (e^2 + e - 2) \end{aligned}$$

Resposta: $A_L = \sqrt{2}\pi (e^2 + e - 2) \text{ u. a.}$

b)

Resolução: Vamos calcular as derivadas, elevar ao quadrado e somá-las:

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = t^2 - 1 & \rightarrow (\dot{x})^2 = (t^2 - 1)^2 = t^4 - 2t^2 + 1 \\ \dot{y} = 2t & \rightarrow (\dot{y})^2 = (2t)^2 = 4t^2 \end{array}$$

Somando as duas,

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2 = t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2 + 1)^2$$

Aplicando na fórmula,

$$\begin{aligned} A_L &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dx = 2\pi \int_1^2 t^2 \sqrt{(t^2 + 1)^2} dt = 2\pi \int_1^2 t^2 (t^2 + 1) dt \\ &= 2\pi \int_1^2 (t^4 + t^2) dt = 2\pi \left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right]_1^2 \\ &= \frac{2\pi}{15} [(3 \cdot 2^5 + 5 \cdot 2^3) - (3 \cdot 1^5 + 5 \cdot 1^3)] = \frac{2\pi}{15} (96 + 40 - 3 - 5) \\ &= \frac{256\pi}{15} \end{aligned}$$

Resposta: $A_L = \frac{256\pi}{15} \text{ u. a.}$

c)

Resolução: Vamos calcular as derivadas, elevar ao quadrado e somá-las:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3t^2 & \rightarrow & (\dot{x})^2 = (3t^2)^2 = 9t^4 \\ \dot{y} &= 2t & \rightarrow & (\dot{y})^2 = (2t)^2 = 4t^2\end{aligned}$$

Somando as duas,

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = 9t^4 + 4t^2 = t^2(9t^2 + 4)$$

Aplicando na fórmula,

$$A_L = 2\pi \int_a^b y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dx = 2\pi \int_0^1 (t^2) \sqrt{t^2(9t^2 + 4)} dt = 2\pi \int_0^1 t^3 \sqrt{(9t^2 + 4)} dt$$

Fazendo mudança de variável,

$$u = 9t^2 + 4 \quad \rightarrow \quad du = 18t dt \quad \rightarrow \quad \frac{du}{18} = t dt$$

$$t^2 = \frac{u - 4}{9}$$

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad u = 9 \cdot 0^2 + 4 = 4$$

$$t = 1 \quad \rightarrow \quad u = 9 \cdot 1^2 + 4 = 13$$

Então,

$$\begin{aligned}A_L &= 2\pi \int_0^1 t^3 \sqrt{(9t^2 + 4)} dt = 2\pi \int_4^{13} \left(\frac{u-4}{9}\right) \sqrt{u} \frac{du}{18} = \frac{\pi}{81} \int_4^{13} (u^{3/2} - 4u^{1/2}) du \\ &= \frac{\pi}{81} \left[\frac{u^{5/2}}{5/2} - 4 \frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_4^{13} = \frac{2\pi}{81} \left[\frac{13^{5/2}}{5} - 4 \frac{13^{3/2}}{3} - \frac{4^{5/2}}{5} + 4 \frac{4^{3/2}}{3} \right] \\ &= \frac{2\pi}{81 \cdot 15} (3 \cdot 13^2 \cdot \sqrt{13} - 4 \cdot 5 \cdot 13 \sqrt{13} - 3 \cdot 32 + 4 \cdot 5 \cdot 8) \\ &= \frac{2\pi}{1215} (247 \cdot \sqrt{13} + 64)\end{aligned}$$

$$\text{Resposta: } A_L = \frac{2\pi}{1215} (247 \cdot \sqrt{13} + 64) \text{ u. a.}$$

d)

Resolução: Vamos calcular as derivadas, elevar ao quadrado e somá-las:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -3 \cos^2 t \sin t & \rightarrow & (\dot{x})^2 = (-3 \cos^2 t \sin t)^2 = 9 \cos^4 t \sin^2 t \\ \dot{y} &= 3 \sin^2 t \cos t & \rightarrow & (\dot{y})^2 = (3 \sin^2 t \cos t)^2 = 9 \sin^4 t \cos^2 t\end{aligned}$$

Somando as duas,

$$\begin{aligned}(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 &= 9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t = 9 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) \\&= 9 \cos^2 t \sin^2 t\end{aligned}$$

Aplicando na fórmula,

$$\begin{aligned}A_L &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} (\sin^3 t) \sqrt{9 \cos^2 t \sin^2 t} dt \\&= 6\pi \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt\end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável,

$$\begin{aligned}u &= \sin t \quad \rightarrow \quad du = \cos t dt \\t &= 0 \quad \rightarrow \quad u = \sin 0 = 0 \\t &= \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad u = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\end{aligned}$$

Então,

$$A_L = 6\pi \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt = 6\pi \int_0^1 u^4 du = 6\pi \left[\frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \frac{6\pi}{5} [1^5 - 0^5] = \frac{6\pi}{5}$$

Resposta: $A_L = \frac{6\pi}{5} u. a.$

e)

Resolução: Vamos calcular as derivadas, elevar ao quadrado e somá-las:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{2}{t} \quad \rightarrow \quad (\dot{x})^2 = \left(\frac{2}{t}\right)^2 = \frac{4}{t^2} \\ \dot{y} &= 1 - \frac{1}{t^2} \quad \rightarrow \quad (\dot{y})^2 = \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}\end{aligned}$$

Somando as duas,

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = \frac{4}{t^2} + 1 - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4} = 1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4} = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2$$

Aplicando na fórmula,

$$\begin{aligned}
A_L &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dx = 2\pi \int_1^e \left(t + \frac{1}{t}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2} dt \\
&= 2\pi \int_1^e \left(t + \frac{1}{t}\right) \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = 2\pi \int_1^e \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt \\
&= 2\pi \left[\frac{t^2}{2} + 2 \ln t - \frac{1}{2t^2} \right]_1^e \\
&= \pi \left[\left(e^2 + 4 \ln e - \frac{1}{e^2}\right) - \left(1^2 + 4 \ln 1 - \frac{1}{1^2}\right) \right] \\
&= \pi \left(e^2 + 4 - \frac{1}{e^2} - 1 + 1 \right) = \frac{\pi}{e^2} (e^4 + 4e^2 - 1)
\end{aligned}$$

Resposta: $A_L = \frac{\pi}{e^2} (e^4 + 4e^2 - 1) u. a.$

f)

Resolução: Vamos calcular as derivadas, elevar ao quadrado e somá-las:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -8 \sin(2t) & \rightarrow & (\dot{x})^2 = (-8 \sin(2t))^2 = 64 \sin^2(2t) \\
\dot{y} &= 8 \cos(2t) & \rightarrow & (\dot{y})^2 = (8 \cos(2t))^2 = 64 \cos^2(2t)
\end{aligned}$$

Somando as duas,

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = 64 \sin^2(2t) + 64 \cos^2(2t) = 64(\sin^2(2t) + \cos^2(2t)) = 64$$

Aplicando na fórmula,

$$\begin{aligned}
A_L &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} (4 \sin(2t)) \sqrt{64} dt = 64\pi \int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt \\
&= 32\pi [-\cos(2t)]_0^{\pi/2} = 32\pi \left[-\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos(2 \cdot 0) \right] = 64\pi
\end{aligned}$$

Resposta: $A_L = 64\pi u. a.$

g)

Resolução: Vamos calcular as derivadas, elevar ao quadrado e somá-las:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -2 \sin t & \rightarrow & (\dot{x})^2 = (-2 \sin t)^2 = 4 \sin^2 t \\
\dot{y} &= 2 \cos t & \rightarrow & (\dot{y})^2 = (2 \cos t)^2 = 4 \cos^2 t
\end{aligned}$$

Somando as duas,

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = 4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t = 4(\sin^2 t + \cos^2 t) = 4$$

Aplicando na fórmula,

$$\begin{aligned} A_L &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dx = 2\pi \int_0^{\pi/4} (2 \sin t) \sqrt{4} dt = 8\pi \int_0^{\pi/4} \sin t dt = 8\pi [\cos t]_0^{\pi/4} \\ &= 8\pi \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos 0 \right] = 8\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = 4\pi(\sqrt{2} - 2) \end{aligned}$$

Resposta: $A_L = 4\pi(\sqrt{2} - 2) u. a.$

h)

Resolução: Vamos calcular as derivadas, elevar ao quadrado e somá-las:

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = 1 & \rightarrow (\dot{x})^2 = (1)^2 = 1 \\ \dot{y} = 3t^2 & \rightarrow (\dot{y})^2 = (3t^2)^2 = 9t^4 \end{array}$$

Somando as duas,

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = 1 + 9t^4$$

Aplicando na fórmula,

$$A_L = 2\pi \int_a^b y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dx = 2\pi \int_0^1 (t^3) \sqrt{1 + 9t^4} dt$$

Fazendo mudança de variável,

$$u = 1 + 9t^4 \rightarrow du = 36t^3 dt \rightarrow \frac{du}{36} = t^3 dt$$

$$t = 0 \rightarrow u = 1 + 9 \cdot 0^4 = 1$$

$$t = 1 \rightarrow u = 1 + 9 \cdot 1^4 = 10$$

Então,

$$\begin{aligned} A_L &= 2\pi \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + 9t^4} dt = 2\pi \int_1^{10} \sqrt{u} \frac{du}{36} = \frac{\pi}{18} \int_1^{10} (u^{1/2}) du = \frac{\pi}{18} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^{10} \\ &= \frac{\pi}{27} [10^{3/2} - 1^{3/2}] = \frac{\pi}{27} (10 \cdot \sqrt{10} - 1) \end{aligned}$$

Resposta: $A_L = \frac{\pi}{27} (10 \cdot \sqrt{10} - 1) u. a.$

P 5.34

a)

Resolução:

$$x = r \cdot \cos \theta = 2 \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -1$$

$$y = r \cdot \sin \theta = 2 \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3}$$

Resposta: $P(-1, \sqrt{3})$.

b)

Resolução:

$$x = r \cdot \cos \theta = 1 \cdot \cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) = 1 \cdot (0) = 0$$

$$y = r \cdot \sin \theta = 1 \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) = 1 \cdot (-1) = -1$$

Resposta: $Q(0, -1)$.

c)

Resolução:

$$x = r \cdot \cos \theta = 3 \cdot \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$y = r \cdot \sin \theta = 3 \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Resposta: $R\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

d)

Resolução:

$$x = r \cdot \cos \theta = 2 \cos \left(\frac{7\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\sqrt{3}$$

$$y = r \cdot \sin \theta = 2 \cdot \sin \left(\frac{7\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -1$$

Resposta: $S(-\sqrt{3}, -1)$.

P 5.36

a)

Resolução:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3)^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{3}{3\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Resposta: $P\left(6, \frac{\pi}{6}\right)$.

b)

Resolução:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \arctan(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

Resposta: $Q\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

c)

Resolução:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

Resposta: $R\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$.

d)

Resolução:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{2}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Resposta: $T\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$.

P 5.38

a)

Resolução:

Lembrando que $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ vamos substituir na expressão,

$$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = 2 \rightarrow r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2$$

Resposta: $r^2 = 2$.

b)

Resolução:

Lembrando que $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ vamos substituir na expressão,

$$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = 4r \sin \theta \rightarrow r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 4r \sin \theta$$

Resposta: $r = 4 \sin \theta$ ou $r = 0$.

c)

Resolução:

Lembrando que $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ vamos substituir na expressão,

$$(r \cos \theta)^3 = 2 (r \sin \theta)^2 \rightarrow r^3 \cos^3 \theta = 2r^2 \sin^2 \theta \rightarrow r = \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta}$$

Resposta: $r = 2 \operatorname{tg}^2 \theta \sec \theta$ ou $r = 0$.

d)

Resolução:

Lembrando que $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ vamos substituir na expressão,

$$(r \sin \theta)^2 = 4((r \cos \theta)^2 + 1) \rightarrow r^2 \sin^2 \theta = 4(r^2 \cos^2 \theta + 1)$$

$$r^2 \sin^2 \theta - 4r^2 \cos^2 \theta = 4 \rightarrow r^2(\sin^2 \theta - 4 \cos^2 \theta) = 4$$

Resposta: $r^2 = \frac{4}{\sin^2 \theta - 4 \cos^2 \theta}$.

e)

Resolução:

Lembrando que $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ vamos substituir na expressão,

$$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = 2r \cos \theta \rightarrow r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2r \cos \theta$$

Resposta: $r = 2 \cos \theta$ ou $r = 0$.

P 5.42

a)

Resolução:

Aplicando diretamente a fórmula, temos:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} [2]^2 d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} d\theta = 2[\theta]_0^{\pi/4} = 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

Resposta: $A = \frac{\pi}{2}$ u. a.

b)

Resolução:

Aplicando diretamente a fórmula, temos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} [\sin \theta + \cos \theta]^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (1 + 2 \sin \theta \cos \theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi/4} d\theta + 2 \int_0^{\pi/4} \sin \theta \cos \theta d\theta \right] \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável na segunda integral,

$$u = \sin \theta \rightarrow du = \cos \theta d\theta$$

$$\theta = 0 \rightarrow u = \sin 0 = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left[(\theta)^{\pi/4} + 2 \int_0^{\sqrt{2}/2} u du \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} + u^2 \right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} (\pi + 2) \end{aligned}$$

Resposta: $A = \frac{1}{8} (\pi + 2) u. a.$

c)

Resolução:

Aplicando diretamente a fórmula, temos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} [3 \sec 2\theta]^2 d\theta = \frac{9}{2} \int_0^{\pi/8} \sec^2(2\theta) d\theta = \frac{9}{2} \left[\frac{\operatorname{tg} 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/8} \\ &= \frac{9}{4} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{tg} 0 \right) = \frac{9}{4} (1 - 0) = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Resposta: $A = \frac{9}{4} u. a.$

d)

Resolução:

Aplicando diretamente a fórmula, temos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\sqrt{e^{2\theta} + 1} \right]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{2\theta} + 1) d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2\theta}}{2} + \theta \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{e^{2.1}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{e^{2.0}}{2} + 0 \right) \right] = \frac{1}{4} (e^2 + 2 - 1) \\ &= \frac{1}{4} (e^2 + 1) \end{aligned}$$

Resposta: $A = \frac{1}{4} (e^2 + 1) u. a.$

e)

Resolução:

Aplicando diretamente a fórmula, temos:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [1 - \cos \theta]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left[\theta - 2 \sin \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3\pi}{2} - 2 \sin \pi + \frac{1}{4} \sin(2\pi) \right) - \left(\frac{3 \cdot 0}{2} - 2 \sin 0 + \frac{1}{4} \sin(2 \cdot 0) \right) \right] \\
 &= \frac{3\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Resposta: $A = \frac{3\pi}{4} u. a.$

f)

Resolução:

Aplicando diretamente a fórmula, temos:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/9} [\cos 3\theta]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/9} \cos^2(3\theta) d\theta$$

Fazendo mudança de variável na integral,

$$u = 3\theta \rightarrow du = 3d\theta \rightarrow d\theta = \frac{du}{3}$$

$$\theta = 0 \rightarrow u = 3 \cdot 0 = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{9} \rightarrow u = 3 \cdot \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \cos^2 u \frac{du}{3} = \frac{1}{6} \int_0^{\pi/3} \cos^2 u du = \frac{1}{6} \left(\frac{u}{2} + \frac{1}{4} \sin(2u) \right) \Big|_0^{\pi/3} \\
 &= \frac{1}{24} \left[\left(2 \cdot \frac{\pi}{3} + \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{3} \right) \right) - (2 \cdot 0 + \sin(2 \cdot 0)) \right] = \frac{1}{24} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Resposta: $A = \frac{1}{24} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) u. a.$

g)

Resolução:

Aplicando diretamente a fórmula, temos:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} [\sec^2 2\theta]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} (\sec^2 2\theta)(\sec^2 2\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} (1 + \operatorname{tg}^2 2\theta)(\sec^2 2\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável na integral,

$$u = \operatorname{tg}(2\theta) \rightarrow du = 2 \sec^2 2\theta d\theta \rightarrow \sec^2 2\theta d\theta = \frac{du}{2}$$

$$\theta = 0 \rightarrow u = \operatorname{tg}(2 \cdot 0) = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{8} \rightarrow u = \operatorname{tg}\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = 1$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} (1 + \operatorname{tg}^2 2\theta)(\sec^2 2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + u^2) \frac{du}{2} = \frac{1}{4} \left(u + \frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Resposta: $A = \frac{1}{3} \text{ u. a.}$

P 5.44 Calcular o comprimento de arco das curvas em coordenadas polares:

a)

Resolução:

Vamos derivar a equação e somar os quadrados para colocar na fórmula,

$$\begin{aligned}
 r' &= 3 \cos \theta \rightarrow r^2 + r'^2 = (3 \operatorname{sen} \theta)^2 + (3 \cos \theta)^2 = 9 \operatorname{sen}^2 \theta + 9 \cos^2 \theta \\
 &= 9(\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) = 9
 \end{aligned}$$

Aplicando na fórmula,

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2} d\theta = \int_0^{\pi/6} \sqrt{9} d\theta = 3 \int_0^{\pi/6} d\theta = 3(\theta) \Big|_0^{\pi/6} = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

Resposta: $L = \frac{\pi}{2} \text{ u. c.}$

b)

Resolução:

Vamos derivar a equação e somar os quadrados para colocar na fórmula,

$$\begin{aligned} r' = 2(\theta + 1) \quad \rightarrow \quad r^2 + r'^2 &= ((\theta + 1)^2)^2 + (2(\theta + 1))^2 \\ &= (\theta + 1)^4 + 4(\theta + 1)^2 = (\theta + 1)^2(\theta^2 + 2\theta + 1 + 4) \end{aligned}$$

Aplicando na fórmula,

$$\begin{aligned} L &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2} d\theta = \int_0^1 \sqrt{(\theta + 1)^2(\theta^2 + 2\theta + 5)} d\theta \\ &= \int_0^1 (\theta + 1)\sqrt{(\theta^2 + 2\theta + 5)} d\theta \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável,

$$u = \theta^2 + 2\theta + 5 \quad \rightarrow \quad du = 2(\theta + 1)d\theta \quad \rightarrow \quad \frac{du}{2} = (\theta + 1)d\theta$$

mudando também os limites de integração,

$$\theta = 0 \quad \rightarrow \quad u = 0^2 + 2 \cdot 0 + 5 = 5$$

$$\theta = 1 \quad \rightarrow \quad u = 1^2 + 2 \cdot 1 + 5 = 8$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 (\theta + 1)\sqrt{(\theta^2 + 2\theta + 5)} d\theta = \int_5^8 \sqrt{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int_5^8 u^{1/2} du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_5^8 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} (8^{3/2} - 5^{3/2}) = \frac{1}{3} (16\sqrt{2} - 5\sqrt{5}) \end{aligned}$$

Resposta: $L = \frac{1}{3}(16\sqrt{2} - 5\sqrt{5})$ u. c.

c)

Resolução:

Vamos derivar a equação e somar os quadrados para colocar na fórmula,

$$r' = 2e^{2\theta} \quad \rightarrow \quad r^2 + r'^2 = (e^{2\theta})^2 + (2e^{2\theta})^2 = e^{4\theta} + 4e^{4\theta} = 5e^{4\theta}$$

Aplicando na fórmula,

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2} d\theta = \int_0^1 \sqrt{5e^{4\theta}} d\theta = \sqrt{5} \int_0^1 e^{2\theta} d\theta = \sqrt{5} \left[\frac{e^{2\theta}}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} (e^{2.1} - e^{2.0}) = \frac{\sqrt{5}}{2} (e^2 - 1)$$

Resposta: $L = \frac{\sqrt{5}}{2} (e^2 - 1) u. c.$

d)

Resolução:

Vamos derivar a equação e somar os quadrados para colocar na fórmula,

$$r' = 4 \cos \theta \quad \rightarrow \quad r^2 + r'^2 = (4 \sin \theta)^2 + (4 \cos \theta)^2 = 4 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta$$

$$= 4(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 4$$

Aplicando na fórmula,

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{4} d\theta = 2 \int_0^{\pi} d\theta = 2(\theta)_0^{\pi} = 2\pi$$

Resposta: $L = 2\pi u. c.$

e)

Resolução:

Vamos derivar a equação e somar os quadrados para colocar na fórmula,

$$r' = \sin \theta \quad \rightarrow \quad r^2 + r'^2 = (1 - \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2$$

$$= 1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 2 - 2\cos \theta$$

Aplicando na fórmula,

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos \theta} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta$$

Lembrando que,

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2} \quad \rightarrow \quad 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

então,

$$\begin{aligned}
 L &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} \, d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \, d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \, d\theta \\
 &= 2 \left[-2 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]_0^{2\pi} = -4(\cos \pi - \cos 0) = 8
 \end{aligned}$$

Resposta: $L = 8 \, u. c.$

f)

Resolução:

Vamos derivar a equação e somar os quadrados para colocar na fórmula,

$$\begin{aligned}
 r' &= -4 \cos^3 \left(\frac{\theta}{4} \right) \sin \left(\frac{\theta}{4} \right) \cdot \frac{1}{4} \rightarrow r^2 + r'^2 \\
 &= \left(\cos^4 \left(\frac{\theta}{4} \right) \right)^2 + \left(-\cos^3 \left(\frac{\theta}{4} \right) \sin \left(\frac{\theta}{4} \right) \right)^2 \\
 &= \cos^8 \left(\frac{\theta}{4} \right) + \cos^6 \left(\frac{\theta}{4} \right) \sin^2 \left(\frac{\theta}{4} \right) = \cos^6 \left(\frac{\theta}{4} \right) \left[\cos^2 \left(\frac{\theta}{4} \right) + \sin^2 \left(\frac{\theta}{4} \right) \right] \\
 &= \cos^6 \left(\frac{\theta}{4} \right)
 \end{aligned}$$

Aplicando na fórmula,

$$\begin{aligned}
 L &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2} \, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^6 \left(\frac{\theta}{4} \right)} \, d\theta = \int_0^{\pi} \cos^3 \left(\frac{\theta}{4} \right) \, d\theta \\
 &= \int_0^{\pi} \cos^2 \left(\frac{\theta}{4} \right) \cos \left(\frac{\theta}{4} \right) \, d\theta = \int_0^{\pi} \left[1 - \sin^2 \left(\frac{\theta}{4} \right) \right] \cos \left(\frac{\theta}{4} \right) \, d\theta
 \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável,

$$u = \sin \left(\frac{\theta}{4} \right) \rightarrow du = \cos \left(\frac{\theta}{4} \right) \frac{1}{4} \, d\theta \rightarrow 4 \, du = \cos \left(\frac{\theta}{4} \right) \, d\theta$$

mudando também os limites de integração,

$$\theta = 0 \rightarrow u = \sin \left(\frac{0}{4} \right) = 0$$

$$\theta = \pi \rightarrow u = \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi} \left[1 - \sin^2 \left(\frac{\theta}{4} \right) \right] \cos \left(\frac{\theta}{4} \right) d\theta = \int_0^{\sqrt{2}/2} [1 - u^2] 4du = 4 \int_0^{\sqrt{2}/2} (1 - u^2) du \\
&= 4 \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{4}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - 0 + (0)^2 \right) = \frac{4}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{3} (\sqrt{2} - 1)
\end{aligned}$$

Resposta: $L = \frac{1}{3} (\sqrt{2} - 1) u. c.$

g)

Resolução:

Vamos derivar a equação e somar os quadrados para colocar na fórmula,

$$\begin{aligned}
r' &= 3 \sin^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) \cos \left(\frac{\theta}{3} \right) \cdot \frac{1}{3} \rightarrow r^2 + r'^2 = \left(\sin^3 \left(\frac{\theta}{3} \right) \right)^2 + \left(\sin^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) \cos \left(\frac{\theta}{3} \right) \right)^2 \\
&= \sin^6 \left(\frac{\theta}{3} \right) + \sin^4 \left(\frac{\theta}{3} \right) \cos^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) = \sin^4 \left(\frac{\theta}{3} \right) \left[\sin^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) \right] \\
&= \sin^4 \left(\frac{\theta}{3} \right)
\end{aligned}$$

Aplicando na fórmula,

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^4 \left(\frac{\theta}{3} \right)} d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) d\theta$$

Fazendo mudança de variável,

$$u = \frac{\theta}{3} \rightarrow du = \frac{1}{3} d\theta \rightarrow 3du = d\theta$$

mudando também os limites de integração,

$$\begin{aligned}
\theta = 0 &\rightarrow u = \frac{0}{3} = 0 \\
\theta = \frac{\pi}{2} &\rightarrow u = \frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\theta = \int_0^{\pi/6} \sin^2(u) 3du = 3 \left[\frac{u}{2} - \frac{1}{4} \sin(2u) \right]_0^{\pi/6} \\
 &= \frac{3}{4} \left[\left(2 \cdot \frac{\pi}{6} - \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6} \right) \right) - (2 \cdot 0 - \sin(2 \cdot 0)) \right] = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Resposta: $L = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ u. c.